Discontinuidades en guía de ondas. Tratamiento matemático

Sea $\hat{\bar{F}}(u_1, u_2, z) = \begin{cases} \hat{\bar{E}}(u_1, u_2, z) \\ \hat{\bar{H}}(u_1, u_2, z) \end{cases}$ (1)

Se define $r = TK_{ij}$ = el modo $\begin{cases} TEM \\ TE_{ij} \\ TM_{ij} \\ E-H_{ij} \\ H-E_{ij} \end{cases}$ $; r \in \mathrm{N}$

A cada modo de operación se le hace corresponder un número *r*. El modo identificado por $r = 1$ es el modo dominante. Luego $\hat{\bar{F}}_r$ es el campo $\hat{\bar{E}}$ o $\hat{\bar{H}}$ del modo $r = TK_{ij}$. Se conoce que $\hat{\bar{F}}_r$ es de la forma

$$\hat{\bar{F}}_r^{\pm}(u_1, u_2, z) = \hat{F}_{0,r}^{\pm} \bar{f}_r^N(u_1, u_2) e^{\mp \hat{\gamma}_r z} \tag{2}$$

donde $\hat{F}_{0,r}^{\pm}$ es la amplitud compleja y

$$\bar{f}_r^N(u_1, u_2) = \bar{f}_{Tr}^N(u_1, u_2) + \bar{f}_{zr}^N(u_1, u_2) \tag{3}$$

$\bar{f}_{Tr}^N(u_1, u_2)$ representa $\bar{f}$ en dirección transversal

$\bar{f}_{zr}^N(u_1, u_2)$ representa $\bar{f}$ en dirección axial

En la zona cercana de una discontinuidad los modos de orden más alto son excitado por la discontinuidad y localmente sirven para que $\hat{\bar{F}}(u_1, u_2, z)$ satisfaga las condiciones de borde. Estos modos almacenan energía eléctrica y magnética y se puede utilizar como elementos de acople.

La colección de soluciones para los diferentes modos de propagación constituye un conjunto completo de funciones ortogonales. Luego es posible representar a cualquier función de 3 coordenadas espaciales a través de una combinación lineal de las funciones representativas de los diferentes modos.

En las situaciones que se estudiarán en este curso, las líneas de transmisión y/o guías de onda se utilizarán para operación exclusivamente en el modo dominante. En consecuencia, todos los modos de orden más alto superior (*r* > 1) tendrán frecuencias de corte mayores que la frecuencia de operación por lo que se desvanecerán lejos de lo discontinuidad.

En la vecindad de la discontinuidad y hacia el generador

$$\hat{\bar{F}}(u_1, u_2, z) = \sum_{r=1}^{\infty} \bar{f}_r^N(u_1, u_2) \left[\hat{F}_{0,r}^{+} e^{-\hat{\gamma}_r z} + \hat{F}_{0,r}^{-} e^{+\hat{\gamma}_r z} \right] \tag{4}$$

Lejos de la discontinuidad

$$\hat{\bar{F}}(u_1,u_2,z)=\bar{f}_1^N(u_1,u_2)\left[\hat{F}_{0,1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}+\hat{F}_{0,1}^{-}e^{+\hat{\gamma}_1 z}\right] \tag{5}$$

Para determinar las potencias incidente, reflejadas y transmitidas en la dirección z, en cualquier punto de la guía de onda y/o línea de transmisión, es necesario calcular

$$P(z)=\iint_{ST}\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\hat{\bar{E}}_T\times\hat{\bar{H}}_T^{*}\right\}\cdot\overline{da} \tag{6}$$

Luego el análisis de la discontinuidad se basan en su influencia sobre los campos transversales del modo dominante.

$\hat{\bar{F}}_{T1}(u_1,u_2,z)$ es la componente transversal del campo $\hat{\bar{F}}_1(u_1,u_2,z)$

$$\bar{f}_{T1}^N(u_1,u_2)\left[\hat{F}_{0,1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}+\hat{F}_{0,1}^{-}e^{+\hat{\gamma}_1 z}\right] \tag{7}$$

Simplifiquemos la nomenclatura:

$$\hat{\Gamma}(0)=\frac{\hat{F}_{0,1}^{-}}{\hat{F}_{0,1}^{+}} \quad \text{es la coeficiente de reflexión en } z=0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow\hat{\bar{F}}_{T1}(u_1,u_2,z)=\bar{f}_{T1}^N(u_1,u_2)\hat{F}_{0,1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}\left[1+\hat{\Gamma}(0)e^{+2\hat{\gamma}_1 z}\right] \tag{9}$$

$$\text{donde } \hat{\Gamma}(0)e^{+2\hat{\gamma}_1 z}=\hat{\Gamma}(z) \tag{10}$$

$$\Rightarrow\hat{\bar{F}}_{T1}(u_1,u_2,z)=\hat{\bar{f}}_{T1}^N(u_1,u_2)\hat{F}_{0,1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}\left[1+\hat{\Gamma}(z)\right] \tag{11}$$

En particular para $\hat{\bar{E}}$ y $\hat{\bar{H}}$ tenemos:

$$\hat{\bar{E}}_{T1}(u_1,u_2,z)=\bar{e}_{T1}^N(u_1,u_2)\hat{E}_{0,1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}\left[1+\hat{\Gamma}(z)\right] \tag{12}$$

donde $\hat{\Gamma}(z)$ es el coeficiente de reflexión de $\hat{\bar{E}}_T$.

$$\hat{\bar{H}}_{T1}(u_1,u_2,z)=\bar{h}_{T1}^N(u_1,u_2)\hat{H}_{0,1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}\left[1+\hat{\Gamma}'(z)\right] \tag{13}$$

donde $\hat{\Gamma}'(z)$ es el coeficiente de reflexión de $\hat{\bar{H}}_T$.

$$\hat{\bar{H}}_{T1}^N(u_1,u_2)=\bar{1}_z\times\bar{e}_{T1}^N(u_1,u_2)\left[\frac{\hat{E}_{0,1}^{+}e^{-\gamma_1 z}}{\hat{\eta}_1}\right]\left[1-\hat{\Gamma}(z)\right] \tag{14}$$

Recordar: $\bar{h}_{T1}^{N}(u_1,u_2)=\bar{1}_z\times\hat{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)$ y $\hat{H}_{0,1}^{\pm}=\pm\hat{E}_{0,1}^{\pm}/\hat{\eta}_1$

$$\Gamma=E^-\big/E^+,\ \Gamma'=H^-\big/H^+=\frac{-E^-}{\eta}\cdot\frac{\eta}{E^+}=-\Gamma$$

Cálculo de $P(z)$

$$P(z)=\iint_{ST}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{E}}_{T1}\times\hat{\bar{H}}_{T1}^{*}\right\}\cdot\bar{da}$$
$$=\iint_{ST}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{E}_{T1}^{+}\bar{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)e^{-\hat{\gamma}_1 z}\left[1+\hat{\Gamma}(z)\right]\times\left[\bar{1}_z\times\left[\frac{\hat{E}_{T1}^{+}e^{-\hat{\gamma}_1 z}}{\hat{\eta}_1}\right]\left[1-\hat{\Gamma}(z)\right]\bar{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)\right]^{*}\right\}\cdot\bar{da}$$
$$=\iint_{ST}1\big/2\,2\mathrm{Re}\left\{\frac{\left|\hat{E}_{0,1}^{+}\right|^{2}e^{-2\alpha_{c1}z}\left(1-\left|\hat{\Gamma}(z)\right|^{2}+j\,2\,\mathrm{Im}\,\hat{\Gamma}(z)\right)\left|\bar{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)\right|^{2}}{\hat{\eta}_1}\right\}\cdot\bar{da}$$
$$=\frac{\left|\hat{E}_{0,1}^{+}\right|^{2}}{2|\hat{\eta}_1|}e^{-2\alpha_{c1}z}\left(1-\left|\hat{\Gamma}(z)\right|^{2}\right)\left[\left|\iint_{ST}\bar{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)\right|^{2}\right]\cdot\bar{da}\qquad(15)$$

Llámese $\left[\left|\iint_{ST}\bar{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)\right|^{2}\right]\cdot\bar{da}=K_D^2$ (16)

donde K_D^2 es una constante real y positiva.

$$\Rightarrow P(z)=\left(\frac{|\hat{E}_{0,1}^{+}|^{2}}{2|\hat{\eta}_1|}K_D^2\right)e^{-2\alpha_{c_1}z}\left(1-|\hat{\Gamma}(z)|^{2}\right)\ \text{para}\ f>f_{c1}\qquad(17)$$

Un ejemplo para la guía de onda rectangular. Se sabe que $P(z)=\dfrac{|\hat{E}_{0,y}^{+}|^{2}}{4\eta}ab$.

$$\bar{e}_{T1}^{N}(u_1,u_2)=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\bar{1}_y\Rightarrow K_D^2=ab\big/2$$

Un comentario: si $\hat{\Gamma}(z)=0\Rightarrow P(z)=P^{+}(z)=P_0 e^{-2\alpha_{c_1}z}$ (18)

$$P_0=\frac{|\hat{E}_{0,1}^{+}|^{2}}{2\,\eta_1}K_D^2$$

Si $\hat{\Gamma}(z)\neq 0\Rightarrow P(z)=P^{+}(z)-P^{-}(z)=P^{+}(z)\left(1-\left|\hat{\Gamma}(z)\right|^{2}\right)$ con $P^{-}(z)=P^{+}(z)\left|\hat{\Gamma}(z)\right|^{2}$.

$\left|\hat{\Gamma}(z)\right|^{2}$ es la coeficiente de reflexión de potencia, igual que en líneas de transmisión.